В. К. Белошапка, Об одном метрическом свойстве аналитических множеств, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1976, том 40, выпуск 6, 1409–1414

СЕРИЯ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

Том 40, № 6, 1976

УДК 517.5

В. К. БЕЛОШАПКА

ОБ ОДНОМ МЕТРИЧЕСКОМ СВОЙСТВЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ МНОЖЕСТВ

Рассмотрим в $\mathbf{C}^2$ алгебраическую поверхность $H=\{(z,\omega):f(z,\omega)=0\}$, где f — полином. Пусть H проходит через начало координат, а f неприводим. Рассмотрим, далее, пересечение H с единичным шаром

$$B=\{(z,\omega):|z|^2+|\omega|^2<1\}.$$

Обозначим через $\tilde{H}$ ту из компонент связности $H\cap B$, которая содержит точку $(0,\ 0)$. $\tilde{H}$ — неприводимое аналитическое множество с границей $\partial\tilde{H}$. Известно, что площадь $\tilde{H}$ не меньше π, а длина $\partial\tilde{H}$ не меньше 2π [см. Ронкин (1) или Lelong (2)].

Пусть $K_0,\ \ldots,\ K_n$ — компоненты $\partial\tilde{H}$. Существует гипотеза: диаметр хотя бы одного из этих множеств не меньше единицы.

В работе строится пример поверхности, который показывает, что сделанное утверждение не может быть доказано, если исходить только из открытости проекций H на координатные плоскости (теорема 2).

Однако если заменить шар B единичным бицилиндром D^2, где $D=\{z:\ |z|<1\}$, то указанных топологических свойств поверхности оказывается достаточно для доказательства справедливости соответствующего утверждения (теорема 1).

Обозначим через $\check{H}$ ту из компонент $H\cap D^2$, которая содержит точку $(0,\ 0)$. Пусть π_1 и π_2 — проектирования $\mathbf{C}^2$ на координатные плоскости z и ω соответственно, а $K_0,\ \ldots,\ K_n$ — компоненты $\partial\check{H}$ (∂ — граница в H).

ТЕОРЕМА 1. *Диаметр одной из компонент $\partial\check{H}$ не меньше единицы.*

Доказательство. Рассмотрим

$$(\partial D)^2=\{(z,\ \omega):|z|=|\omega|=1\}.$$

Пусть для некоторого m имеем $K_m\cap(\partial D)^2=\varnothing$; тогда либо $K_m\subset\{(z,\ \omega):\ |z|=1,\ |\omega|<1\}$, либо $K_m\subset\{(z,\ \omega):\ |z|<1,\ |\omega|=1\}$. Будем считать, для определенности, что имеет место второй случай. Покажем, что $\pi_2(K_m)=\partial D$. Допустим противное, тогда $\pi_2(K_m)$ — дуга на окружности. Пусть точка $a\in K_m$ проектируется в конец этой дуги. Для некоторой окрестности U точки a имеем:

$$U\cap\partial\check{H}=U\cap H\cap\{(z,\ \omega):|\omega|=1\}.$$

Поэтому, в силу открытости π_2, $\pi_2(K_m)$ содержит некоторый интервал на окружности, включающий $\pi_2(a)$. Противоречие. Итак, $\operatorname{diam} K_m \geqslant \geqslant \operatorname{diam} \pi_2(K_m) = 2$.

Пусть теперь $K_m \cap (\partial D)^2 \neq \varnothing$ для всех $m (m=0, \ldots, n)$. Рассмотрим π_1 как аналитическую функцию на $\breve{H}$. Предположим, что $\pi_1|_{\partial\breve{H}} \neq 0$. Применим к π_1 принцип аргумента [см. ([3])]. Имеем:

$$\sum_{m=0}^{n} \operatorname{ind}_0 \pi_1(K_m) = N,$$

где N — количество нулей π_1 на $\breve{H}$. Точка $(0, 0) \in \breve{H}$, поэтому $N \neq 0$, т. е. для некоторого m

$$\operatorname{ind}_0 \pi_1(K_m) \neq 0.$$

Замечая, кроме того, что $\pi_1(K_m) \cap \partial D \neq \varnothing$, делаем вывод: $\operatorname{diam} K_m \geqslant 1$.

Если наше предположение $\pi_1|_{\partial\breve{H}} \neq \neq 0$ не выполнено, то $0 \in \pi_1(K_m)$ для некоторого m и по-прежнему $\pi_1(K_m) \cap \cap \partial D \neq \varnothing$, поэтому $\operatorname{diam} K_m \geqslant 1$.

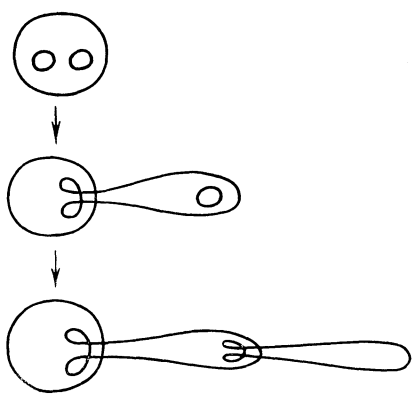

Рис. 1

Заметим, что существование компоненты, окружающей в проекции точку $z=0$, следует из открытости этой проекции. Тем самым доказательство использует лишь указанное свойство поверхности H.

Отметим также, что доказательство, проведенное для случая $\mathbf{C}^2$, справедливо в общем случае.

Идея построения топологического контрпримера к основной гипотезе заключается в следующем.

Рассмотрим в плоскости комплексного переменного t область Δ, которая получается из единичного круга удалением n попарно непересекающихся кругов с центрами на вещественной оси. Пусть $0 \in \Delta$. Занумеруем компоненты границы Δ следующим образом. Внешней компоненте присваивается нулевой номер, внутренние пронумеруем подряд справа налево. Итак, $\partial\Delta = \bigcup_{m=0}^{n} d_m$.

Далее удобно представить Δ как пленку, подвергающуюся деформации. Будем рассматривать исходную плоскость как плоскость $\tau=0$ трехмерного пространства $\mathbf{R}^3(\tau, t)$, где τ — вещественная координата. Осуществим ряд последовательных непрерывных деформаций области Δ. В процессе деформации Δ может выходить из плоскости переменного t.

П е р в ы й э т а п. Самую левую точку контура d_1 будем двигать направо так, чтобы остались неподвижными контур d_0 и контур d_1 за исключением малой окрестности выбранной точки. В результате должна образоваться полоса, выходящая за пределы d_0 на единицу; пусть контуры $d_2, \ldots, d_n$ будут выведены на эту полосу за пределы d_0 (рис. 1). Изменяя, если нужно, координату τ, можно избежать самопересечений.

Далее, взяв за исходную компоненту d_2, повторим процедуру, и т. д. до d_n включительно. Пусть все преобразования оставляют точку (0, 0) на месте. В результате образуется поверхность Δ' в $\mathbf{R}^3(\tau, t)$, граница которой есть цепочка контуров из $n+1$ звена общей длины порядка n.

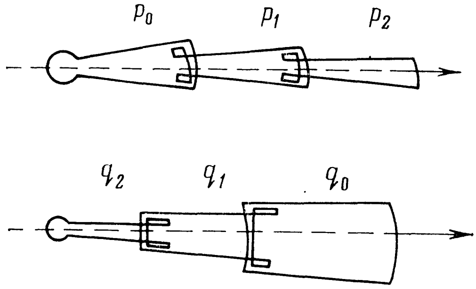

Рис. 2

Теперь равномерно сожмем поверхность Δ' к началу координат в n раз. Получим поверхность Δ''. Преобразования задают, в итоге, диффеоморфизм F области Δ на поверхность Δ''.

Пусть ψ — диффеоморфное отображение $\overline{\Delta}$ на себя, причем $\psi(d_m) = d_{n-m}$ и $\psi(0) = 0$. Обозначим через π проекцию $\mathbf{R}^3(\tau, t)$ на плоскость $\tau = 0$. Теперь мы можем определить искомую поверхность M с помощью погружения Δ в $\mathbf{C}^2$ парой функций $z = \pi \circ F$, $\omega = \pi \circ F \circ \psi$.

M проходит через начало координат. Проекции — открытые отображения. Диаметр каждой компоненты есть величина порядка $1/n$. Однако мы еще не можем утверждать, что граница этой поверхности лежит на единичной сфере. Но если n достаточно велико, то расстояние от начала координат до ∂M больше $1/2$.

Перейдем к построению примера. Зафиксируем h, $0<h<1/100$, натуральное n, $10(n+1)h<1\leqslant 10(n+2)h$, и угол θ $0<\theta<\pi/2$. Положим

$$R(x_1, x_2, x_3) = \{\xi \in \mathbf{C} : \xi = re^{ix_3},\ x_1 \leqslant r \leqslant x_2\},$$
$$T(x_1, x_2, x_3) = \{\xi \in \mathbf{C} : \xi = x_3 e^{i\varphi},\ x_1 \leqslant \varphi \leqslant x_2\}.$$

Обозначим

$$A_k^{\pm} = R((10k-2)h,\ (10k+10)h,\ \pm\theta/4^k),$$

$$B_k^{\pm} = R((10k-2)h,\ (10k-1)h,\ \pm 2\theta/4^k),$$

$$L_k^{+} = T(\theta/4^k,\ 2\theta/4^k,\ (10k-2)h),$$

$$L_k^{-} = T(-2\theta/4^k,\ -\theta/4^k,\ (10k-2)h),$$

$$L_k^{1} = T(-2\theta/4^k,\ 2\theta/4^k,\ (10k-1)h),$$

$$L_k^{2} = T(-\theta/4^k,\ \theta/4^k,\ (10k+10)h),$$

где $k=1, \ldots, n$,

$$A_0^{\pm}=R(h,\ 10h,\ \pm\theta),$$

$$L_0^1=T(\theta,\ 2\pi-\theta,\ h),$$

$$L_0^2=T(-\theta,\ \theta,\ 10h).$$

Зададим систему контуров $\{p_k\}$ (см. рис. 2):

$$p_0=A_0^+\cup L_0^2\cup A_0^-\cup L_0^1,$$

$$p_k=A_k^+\cup L_k^2\cup A_k^-\cup L_k^-\cup B_k^-\cup L_k^1\cup B_k^+\cup L_k^+$$

$$(k=1,\ \ldots,\ n).$$

С помощью функции $\varphi(x)=\sqrt{1-x^2}$ построим новую систему параметров:

$$r_k=\varphi((10k+10)h),\qquad \rho_k=\varphi((10k-1)h),\qquad R_k=\varphi((10k-2)h),$$

где $k=1, \ldots, n$, $r_0=\varphi(10h)$, $R_0=\varphi(h)$.

Обозначим

$$a_k^{\pm}=R(r_k,\ R_k,\ \pm\theta/4^k)\quad (k=0,\ \ldots,\ n),$$

$$b_k^{\pm}=R(\rho_k,\ R_k,\ \pm 2\theta/4^k),$$

$$l_k^+=T(\theta/4^k,\ 2\theta/4^k,\ R_k),$$

$$l_k^-=T(-2\theta/4^k,\ -\theta/4^k,\ R_k),$$

$$l_k^1=T(-2\theta/4^k,\ 2\theta/4^k,\ \rho_k)\quad (k=1,\ \ldots,\ n),$$

$$l_k^2=T(-\theta/4^k,\ \theta/4^k,\ r_k)\quad (k=1,\ \ldots,\ n-1),$$

$$l_n^2=T(\theta/4^n,\ 2\pi-\theta/4^n,\ r_n),$$

$$l_0^1=T(-\theta,\ \theta,\ r_0),$$

$$l_0^2=T(-\theta,\ \theta,\ R_0).$$

Зададим систему контуров $\{q_k\}$ (см. рис. 2):

$$q_0=a_0^+\cup l_0^2\cup a_0^-\cup l_0^1,$$

$$q_k=a_k^+\cup l_k^2\cup a_k^-\cup l_k^-\cup b_k^-\cup l_k^1\cup b_k^+\cup l_k^+$$

$$(k=1,\ \ldots,\ n).$$

В дальнейшем точки самопересечения контуров считаем двойными.

ЛЕММА 1. (1) *Существует диффеоморфизм f p_k на q_k $(k=0, \ldots, n)$ такой, что его график*

$$\Gamma=\{(z,\omega):\omega=f(z),\ z\in\bigcup_{k=0}^{n}p_k\}\subset S=\{(z,\omega):|z|^2+|\omega|^2=1\}.$$

(2) *Пусть* $\gamma_k=\{(z, \omega): \omega=f(z),\ z\in p_k\}$ *и* $i\neq j$; *тогда* $\gamma_i\cap\gamma_j=\varnothing$, *т. е.* $\gamma_0, \ldots, \gamma_n$ — *компоненты связности* Γ.

Доказательство. Значения параметров подобраны так, что существует диффеоморфизм A_k^+ на a_k^+, график которого принадлежит S. Так же поступим с парами A_k^- и a_k^-, B_k^+ и b_k^+, B_k^- и b_k^-. Рассмотрим теперь пару дуг L_k^+ и l_k^+. Зададим диффеоморфизм L_k^+ на l_k^+, согласованный в концах с ранее построенным. Объединяя все эти отображения, получаем диффеоморфизм f. Его график принадлежит S. Утверждение (1) доказано.

Утверждение (2) следует из того, что диффеоморфизм дуг можно выбирать с большой степенью свободы.

ЛЕММА 2. *Для всякого* $\varepsilon>0$ *найдется число* h *такое, что для системы* $\{\gamma_k\}$, *построенной для этого* h,

$$\operatorname{diam}\gamma_k<\varepsilon \quad (k=0, \ldots, n).$$

Доказательство. Положим $h=\varepsilon/50$. Рассмотрим систему $\{p_k\}$. Ограниченную компоненту дополнения к p_0 обозначим через D_0. Среди компонент дополнения к p_k $(k=1, \ldots, n)$ три ограничены. Это две области, расположенные симметрично относительно вещественной оси, D_k^+, D_k^- и область D_k. Положим

$$D_z=\bigcup_{k=0}^{n-1}[D_k-(D_{k+1}^+\cup D_{k+1}^-)]\cup D_n.$$

Будем считать точки D_z, принадлежащие пересечениям вида $\overline{D}_k\cap\overline{D}_{k+1}$ $(k=0, \ldots, n-1)$, двойными. Тогда

$$\partial D_z=\bigcup_{k=0}^{n} p_k.$$

Рассмотрим систему $\{q_k\}$. Дословно так же определяется область D_ω. Вводя аналогичным образом двойные точки, можем написать:

$$\partial D_\omega=\bigcup_{k=0}^{n} q_k.$$

Обозначим через z' переменную в D_z; $|z'|$ означает модуль точки z'.

ЛЕММА 3. *Существует диффеоморфизм* F D_z *на* D_ω *такой, что:*

(1) $F|_{\partial D_z}=f$,

(2) $|F(z')|<|z'|$, *если* $|z'|\geqslant 1/\sqrt{2}$,
$|F(z')|<1/\sqrt{2}$, *если* $|z'|<1/\sqrt{2}$,

(3) $F(0)=0$.

Доказательство. Представим D_z в виде $\bigcup\limits_{\alpha}L_\alpha$, где L_α — дуги окружностей. Часть D_z, лежащую вне круга $\{z\colon |z|<h\}$, расслоим на дуги вида $L_\alpha=D_z\cap\{z\colon |z|=\alpha\}$. При этом двойным точкам соответствуют два экземпляра дуги. Круг $\{z\colon |z|<h\}$ расслоим на дуги $L_\alpha(0<\alpha<h)$ окружностей с центрами на вещественной оси, проходящих через точки

$Le^{i\theta}$ и $he^{-i\theta}$. Окружность при этом может вырождаться в прямую. Отметим, что для некоторого $\alpha_0 < h$ дуга $L\alpha_0$ проходит через нуль.

Расслоение D_ω на дуги окружностей с центрами на вещественной оси проводим так, чтобы концы дуг L_α и l_α (для одного и того же α) были согласованы относительно отображения f. После этого продеформируем систему $\{l_\alpha\}$ в систему $\{l'_\alpha\}$, где l'_α есть гладкая кривая, таким образом, чтобы:

(1) концы l_α и l'_α совпадали;

(2) $0 \in l'_{\alpha_0}$;

(3) если l_α расположена вне $\{\omega : |\omega| < 1/\sqrt{2}\}$, то l'_α, за исключением концов, лежит строго внутри окружности, соответствующей l_α.

Пусть в каждой из систем $\{L_\alpha\}$ и $\{l'_\alpha\}$ отрезок (дуга) зависит от параметра α бесконечно дифференцируемым образом.

Зададим диффеоморфизм F $\overline{D}_z$ на $\overline{D}_\omega$ условием $F(L_\alpha) = l'_\alpha$.

ТЕОРЕМА 2. *Для всякого* $\varepsilon > 0$ *в пространстве* $\mathbf{C}^2$ *существует гладкая вещественно двумерная поверхность* M, *обладающая следующими свойствами*:

(1) $M \subset B$, $\partial M \subset S$;

(2) π_1 *и* π_2 — *открытые отображения* M *в комплексную плоскость*;

(3) $(0, 0) \in M$;

(4) $\operatorname{diam} \gamma_k < \varepsilon$ $(k = 0, \ldots, n)$, *где* $\gamma_0, \ldots, \gamma_n$ — компоненты ∂M.

Доказательство. Выберем h в соответствии с леммой 2 и проведем все описанные построения. Определим M как график диффеоморфизма F.

(1) следует из леммы 3 (пп. 1 и 2) и леммы 1 (п. 1);

(2) следует из того, что F — диффеоморфизм;

(3) справедливо в силу леммы (3) (п. 3);

(4) выполняется в силу (п. 2) леммы 1 и выбора h.

Поверхность единичной сферы задается равенством $|\omega| = \varphi(|z|)$, где $\varphi(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Существенным для построения примера является лишь то, что эта функция непрерывна и строго монотонна на отрезке $[0, 1]$, причем $\varphi(0) = 1$, $\varphi(1) = 0$.

В заключение выражаю благодарность А. Г. Витушкину и Г. М. Хенкину за помощь, оказанную мне в работе над статьей.

Поступило
16.I.1976

Литература

[1] **Ронкин Л. И.**, Введение в теорию целых функций многих переменных, М., «Наука», 1971.

[2] **Lelong P.**, Proprietés métriques des variétés analytiques complexes définies par une equation, Ann. Scient. Ecole Supér, 67 (1950), 393—419.

[3] **Спрингер Дж.**, Введение в теорию римановых поверхностей, М., ИЛ, 1960.