В. К. Белошапка, О построении нормальной формы уравнения поверхности высокой коразмерности, *Матем. заметки*, 1990, том 48, выпуск 2, 3–9

Математические заметки

том 48 выпуск 2 август 1990

О ПОСТРОЕНИИ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЫ УРАВНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ВЫСОКОЙ КОРАЗМЕРНОСТИ

В. К. Белошапка

Рассмотрим набор из k $(k \geqslant 1)$ вещественно-аналитических вещественнозначных функций $\varphi^1, \ldots, \varphi^k$, определенных в окрестности некоторой точки ξ комплексного линейного пространства. Пусть $\varphi^1(\xi) = \ldots = \varphi^k(\xi) = 0$ и k векторов $\operatorname{grad} \varphi^1(\xi), \ldots, \operatorname{grad} \varphi^k(\xi)$ линейно независимы как вектора комплексного линейного пространства. Тогда соотношения $\varphi^1 = \ldots = \varphi^k = 0$ задают в окрестности ξ вещественно-аналитическую поверхность M коразмерности k и $\xi \in M$.

Рассмотрим, далее, голоморфные преобразования h, определенные и обратимые в окрестности точки ξ и такие, что $h(M) \subset M$ и $h(\xi) = \xi$. И пусть $G(M)$ — это группа всех таких преобразований, каждое из которых определено в своей окрестности точки ξ. Условие линейной независимости градиентов позволяет после подходящей комплексной аффинной замены и применения теоремы о неявном отображении записать уравнение M в виде

$$v = F(z, \bar{z}, u), \tag{1}$$

где (z, w) — координатные функции исходного комплексного линейного пространства $\mathbf{C}^{n+k}$

$$z = (z^1, \ldots, z^n); \quad w = (w^1, \ldots, w^k),$$

причем $\bar{F} = F$, $F|_0 = 0$, $dF|_0 = 0$. Выделяя компоненту F степени 1 по z, степени 1 по $\bar{z}$, степени 0 по u, получаем векторзначную эрмитову форму

$$\langle z, z\rangle = (\langle z, z\rangle^1, \ldots, \langle z, z\rangle^k).$$

Эта форма называется формой Леви поверхности M в точке ξ. Отметим также, что $T_0M \cap iT_0M = \{w = 0\}$, поэтому n — это размерность комплексной части касательной плоскости к M в точке ξ.

В работе [1] для $k = 1$ в предположении невырожденности формы $\langle z, z\rangle$ была построена нормальная форма уравнения M, т. е. построено такое разложение пространства $\mathcal{F}$ степенных рядов от $z, \bar{z}$ и u в прямую сумму подпространств

$$\mathcal{F} = \mathcal{N} + \mathcal{R}$$

так, что (1) заменой координат приводится к виду

$$v = N(z, \bar{z}, u), \quad N \in \mathcal{N}.$$

В работе [2] нормальная форма строится в ситуации $k = n = 2$.

В [3] было сформулировано условие (см. определение ниже), обобщающее условие невырожденности обычной эрмитовой формы ($k = 1$), и доказано, что если форма Леви поверхности M коразмерности $k \geqslant 1$ в точке ξ является невырожденной, и $h \in G(M)$, тогда h однозначно определяется значениями первых и вторых производных в точке ξ. Отметим также (см. [3]), что группа автоморфизмов квадрики, чья форма Леви вырождена, не является конечномерной группой Ли.

В данной работе задача построения нормальной формы обсуждается в общей $k \geqslant 1$ постановке. Здесь будут доказаны теоремы о нормализации формальными рядами (теорема 1) и о частичной нормализации (теорема 2), аналогичные теоремам 2.2 и 3.1 работы [1].

Определение. Будем говорить, что k-мерная эрмитова форма является *невырожденной*, если выполнены следующие два условия:

$\langle z, z\rangle^1, \ldots, \langle z, z\rangle^k$ линейно независимы;

из того, что $\langle z, e\rangle = 0$ для всех z следует, что $e = 0$.

Построение нормальной формы начнем с применения конструкции Мозера. Запишем правую часть уравнения M в виде

$$F(z, \bar{z}, u) = \Sigma F_q(z, \bar{z}, u),$$

где $F_q(tz, t\bar{z}, t^2u) = t^q F_q(z, \bar{z}, u)$; тогда

$$F_0 = F_1 = 0, \quad F_2 = Q(z, z) + \langle z, z\rangle + \overline{Q(z, z)},$$

где Q — некоторая квадратичная форма. После замены $z \to z$, $w \to w + 2iQ(z, z)$ уравнение M принимает вид

$$v = \langle z, z\rangle + F_3(z, \bar{z}, u) + \ldots \tag{2}$$

Пусть замена

$$z \to \Sigma f_p, \ w \to \Sigma g_p, \tag{3}$$

где

$$f_p(tz, t^2w) = t^p f_p(z, w),$$

переводит (2) в

$$v = \langle z, z\rangle + \Phi_3(z, \bar{z}, u) + \ldots \tag{4}$$

Тогда

$$f_0 = 0, \ f_1 = Cz, \ g_0 = g_1 = 0, \ g_2 = sw,$$

где

$$\langle Cz, Cz\rangle = s\langle z, z\rangle, \tag{5}$$

т. е. (3) принимает вид

$$z \to Cz + \Sigma_2^\infty f_p, \quad w \to sw + \Sigma_3^\infty g_p. \tag{6}$$

Имеем тождество

$$\operatorname{Im} g = \langle f, f\rangle + \Phi(f, \bar f, \operatorname{Re} g)$$

при $w = u + i(\langle z, z\rangle + F(z, \bar z, u))$. Выделяя в нем μ-ю компоненту, получаем

$$\operatorname{Re}(ig_\mu + 2\langle f_{\mu-1}, Cz\rangle)\,|_{v=\langle z, z\rangle} = F_\mu(z, z, u) - \Phi_\mu(Cz, Cz, su) + \\ + \text{члены, зависящие от } F_\nu,\ g_\nu,\ f_{\nu-1}, \text{ где } \nu < \mu. \tag{7}$$

Это соотношение можно использовать для рекуррентного вычисления компонент f и g. Поэтому для реализации каждого шага этого вычисления нужно уметь решать относительно f и g уравнение следующего вида

$$\operatorname{Re}(ig + 2\langle f, Cz\rangle)\,|_{v=\langle z, z\rangle} = \hat T(z, \bar z, u).$$

Однако если понимать здесь знак равенства как требующий полного совпадения левой и правой частей, то уравнение оказывается, как правило, неразрешимым. Поэтому запишем соотношение так

$$\operatorname{Re}(ig + 2\langle f, Cz\rangle)\,|_{v=\langle z, z\rangle} \equiv \hat T \bmod \mathcal{N},$$

где пространство $\mathcal{N}$ будет соответствующим образом определено. Заменим f на Cf, а g на sg и, пользуясь соотношением (5), получаем

$$\operatorname{Re}(ig + 2\langle f, z\rangle)\,|_{v=\langle z, z\rangle} \equiv T \bmod \mathcal{N}, \tag{8}$$

где $T \in \mathcal{F}$. Разлагая (8) по компонентам различных степеней по z и $\bar z$ и полагая $\Delta h = \partial_u h(\langle z, z\rangle)$, получаем в степенях $(p, 0)$ и $(p+1, 1)$, где $p = 2, 3, \ldots,$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{i}{2} g_p = T_{p0}, \\ &\langle f_{p+1}, z\rangle - \frac{1}{2}\Delta g_p = T_{(p+1)1}; \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

в степенях (1, 0), (2, 1) и (3, 2)

$$\left.\begin{aligned} &ig_1 + 2\langle z, f_0\rangle = T_{10}, \\ &-\Delta g_1 + 2\langle f_2, z\rangle - 2i\langle z, \Delta f_0\rangle = T_{21}, \\ &-\frac{i}{2}\Delta^2 g_1 + 2i\langle \Delta f_2, z\rangle - \langle z, \Delta^2 f_0\rangle = T_{32}; \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

в степенях (0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)

$$-\operatorname{Im} g_0 = T_{00},$$
$$-\operatorname{Re}\Delta g_0 - 2\operatorname{Re}\langle f_1, z\rangle = T_{11},$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{Im}\Delta^2 g_0 - 2\operatorname{Im}\langle \Delta f_1, z\rangle = T_{22}, \tag{11}$$

$$\frac{1}{6}\operatorname{Re}\Delta^3 g_0 - \operatorname{Re}\langle \Delta^2 f_1, z\rangle = T_{33}.$$

Пусть левые части (9)—(11) определяют подпространство $\mathscr{R}$ в пространстве $\mathscr{F}$ формальных степенных рядов от $z, \bar z, u$, т. е. $R \in \mathscr{R}$, если

$$R = R_{00} + R_{11} + R_{22} + R_{33} + 2\operatorname{Re}(R_{10} + R_{21} + R_{32}) + \\ + \Sigma_2^\infty \operatorname{Re}(R_{p0} + R_{(p+1)1}),$$

где

$$R_{p0} = \frac{i}{2}\hat g_p,$$

$$R_{(p+1)1} = \langle \hat f_{p+1}, z\rangle - \frac{1}{2}\Delta g_p,$$

$$R_{10} = i\hat g_1 + 2\langle z, \hat f_0\rangle,$$

$$R_{21} = -\Delta\hat g_1 + \langle \hat f_2, z\rangle - 2i\langle z, \Delta\hat f_0\rangle,$$

$$R_{32} = -\frac{i}{2}\Delta^2\hat g_1 + 2i\langle \Delta\hat f_2, z\rangle - \langle z, \Delta^2\hat f_0\rangle,$$

$$R_{00} = -\operatorname{Im}\hat g_0,$$

$$R_{11} = -\operatorname{Re}\Delta\hat g_0 + 2\operatorname{Re}\langle \hat f_1, z\rangle,$$

$$R_{22} = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\Delta^2\hat g_0 - 2\operatorname{Im}\langle \Delta\hat f_1, z\rangle,$$

$$R_{33} = \frac{1}{6}\operatorname{Re}\Delta^3\hat g_0 - \operatorname{Re}\langle \Delta^2\hat f_1, z\rangle,$$

а $\hat f_p$ и $\hat g_p$ — некоторые степенные ряды от z и u. Пусть далее $\mathscr{N}$ — некоторое, произвольно выбранное, прямое дополнение $\mathscr{R}$ до $\mathscr{F}$, т. е. имеет место прямое разложение

$$\mathscr{F} = \mathscr{R} + \mathscr{N}.$$

ЛЕММА 1. *Уравнение*

$$\operatorname{Re}(ig + 2\langle f, z\rangle)|_{v=\langle z, z\rangle} \equiv T \bmod \mathscr{N}$$

имеет решение для любого $T \in \mathscr{F}$, *причем если потребовать, чтобы ряды*

$$f,\ \partial_z f,\ \partial_w f,\ \partial_z\partial_w f,\ g \tag{12}$$

не имели постоянных членов, то такое решение единственно.

Доказательство. Данное уравнение эквивалентно системе равенств

$$\frac{i}{2}(g_p - \hat g_p) = 0, \qquad p = 2, 3, \ldots,$$

$$\langle (f_{p+1} - \hat f_{p+1}), z\rangle - \frac{1}{2}\Delta(g_p - \hat g_p) = 0,$$

$$-\Delta(g_1 - \hat g_1) + \langle (f_2 - \hat f_2), z\rangle - 2i\langle z, \Delta(f_0 - \hat f_0)\rangle = 0,$$

$$-\frac{i}{2}\Delta^2(g_1 - \hat g_1) + 2i\langle \Delta(f_2 - \hat f_2), z\rangle - \langle z, \Delta^2(f_0 - \hat f_0)\rangle = 0,$$

$$
\begin{aligned}
&i(g_1-\hat g_1)+2\langle z,(f_0-\hat f_0)\rangle=0,\\
&-\operatorname{Im}(g_0-\hat g_0)=0,\\
&-\operatorname{Re}\Delta(g_0-\hat g_0)+2\operatorname{Re}\langle (f_1-\hat f_1),z\rangle=0,\\
&\frac{1}{2}\operatorname{Im}\Delta^2(g_0-\hat g_0)-2\operatorname{Im}\langle\Delta(f_1-\hat f_1),z\rangle=0,\\
&\frac{1}{6}\operatorname{Re}\Delta^3(g_0-\hat g_0)-\operatorname{Re}\langle\Delta^2(f_1-\hat f_1),z\rangle=0,
\end{aligned}
\qquad (13)
$$

где $\hat f$ и $\hat g$ получены в результате проектирования T на $\mathcal{R}$ вдоль $\mathcal{N}$. Отсюда сразу следует существование решения. Далее, дословно повторяя последний шаг доказательства теоремы работы [3], получаем $\deg_u(f_0-\hat f_0)\leqslant 1$; $\deg_u(f_1-\hat f_1)\leqslant 1$; $\deg_u(f_2-\hat f_2)=0$, а все остальные разности равны нулю. Имеем

$$
\begin{aligned}
&f_0=\hat f_0+P+au,\quad f_1=\hat f_1+Cz+B(u)z,\\
&f_2=\hat f_2+A(z,z),\quad g_0=\hat g_0+Q+su+r(u,u),\\
&g_1=\hat g_1+2i\langle z,P+au\rangle
\end{aligned}
$$

в силу (13)

$$
\begin{aligned}
&2\operatorname{Re}\langle Cz,z\rangle=s\langle z,z\rangle,\\
&\langle A(z,z),z\rangle=2i\langle z,a\langle z,z\rangle\rangle,\\
&\operatorname{Re}\langle B(u)z,z\rangle=r(\langle z,z\rangle,u),
\end{aligned}
$$

откуда видно, что при фиксированных P, Q, C, a и B параметры s, A и r определяются однозначно. Вместе с условиями (12) это дает единственность. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. *Существует замена координат* $z\to f(z,w)$, $w\to g(z,w)$, *заданная формальными рядами, приводящими уравнение* M *к виду*

$$
v=\langle z,z\rangle+N(z,\bar z,u),\quad N\in\mathcal{N}, \qquad (14)
$$

причем если выполнены условия (12), *то такая замена единственна.*

Доказательство. Пусть замена переводит (2) в (14), тогда получаем последовательность соотношений вида (7), где Φ следует положить равным N. Рассматривая эти соотношения по $\operatorname{mod}\mathcal{N}$, и применяя лемму 1, получаем однозначно определенные последовательные компоненты f и g.

Замечание. Относительно конкретного вида подпространства заметим, что N_{20} и N^1_{p1} можно положить равным нулю.

Если попытаться реализовать программу исследования, проведенного в [1] для $k=1$, то следует показать, что нормализующая замена дается сходящимися рядами. В этом направлении можно доказать теорему, вполне аналогичную теореме 3.1 работы [1].

Фиксируем следующий набор, который будет играть роль начальных условий, позволяющих однозначно определить частичную нормализацию поверхности: точка $\xi\in M$, γ — k-мерная вещественно-аналитическая поверхность в окрестности ξ, лежащая на M, фиксированная вместе с аналитическим параметром t, проходящая через ξ и трансверсальная $T_\xi^c M$; $e(t) = (e_1(t), \ldots, e_n(t))$ — семейство реперов комплексной части касательной к M, определенное вдоль γ, аналитически зависящее от t.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $\langle z, z\rangle^1$ — первая координата формы Леви M в точке ξ невырождена, тогда для данного набора* (ξ, γ, t, e) *существует единственное голоморфное в окрестности ξ отображение, переводящее*

$$\xi \to (0, 0); \quad \gamma \to \{z = 0, v = 0\},$$

$$t \to u, \quad e_p \to \frac{\partial}{\partial z^p},$$

а M — в поверхность, заданную уравнением

$$v = \Sigma F_{pq}, \quad \text{где } F_{p0} = 0, \ F_{p1}^1 = 0.$$

Доказательство (получается модификацией доказательства теоремы 3.1 работы [1]).

После переноса начала координат в точку ξ и линейной замены можно предполагать, что $\xi = (0, 0)$, $T_\xi^c M = \{w = 0\}$. Пусть γ задана в виде $z = p(t)$, $w = q(t)$, где p и q — аналитичны в окрестности начала координат в $\mathbf{R}^k$. Условие трансверсальности дает $\det q' \neq 0$. Поэтому голоморфное отображение $z \to p(w) + z$, $w \to q(w)$ будет обратимо в окрестности начала координат. Разрешая уравнение M относительно v, получаем $v = F(z, \bar z, u)$, где F может быть представлена в виде сходящегося, в окрестности начала, степенного ряда со значениями в $\mathbf{R}^k$. (Пространство таких функций, обращающихся в нуль в начале координат обозначим $\mathcal{F}^\omega$.) После преобразования γ принимает вид $\{z = 0, v = 0\}$, так что

$$F(0, 0, u) = 0.$$

ЛЕММА 2. *Если $F \in \mathcal{F}^\omega$ и $F(0, 0, u) = 0$, то существует единственное голоморфное преобразование вида*

$$z \to z, \ w \to w + g(z, w); \quad g(0, w) = 0,$$

переводящее $v = F(z, \bar z, u)$ в $v = \tilde F(z, \bar z, u)$, где $\tilde F_{p0} = 0$ для всех p.

Доказательство леммы полностью повторяет доказательство леммы 3.2 из [1].

Пусть F^q, где $q = 1, \ldots, k$,— q-я координата F.

ЛЕММА 3. *Если $F \in \mathcal{F}^\omega$, $F_{p0} = 0$ для всех p и $F_{11}^1(z, \bar z, 0)$ невырождена, то существует единственное голоморфное преобразование вида $z \to z + f(z, w)$, $w \to w$, где $f(0, w) = 0$, $\partial_z f(0, w) = 0$, которое переводит $v = F(z, \bar z, u)$ в $v = \tilde F(z, \bar z, u)$ так, что*

$$\tilde F_{p0} = 0, \ \tilde F_{p1}^1 = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы повторяет доказательство леммы 3.3 из [1], примененное к первой координате, т. е. к уравнению

$$v^1 = F^1(z, \bar{z}, u).$$

Преобразования, сохраняющие точку $\xi = (0, 0)$, $\gamma = \{z = 0, v = 0\}$, параметр u и вид уравнения (15), имеют следующий общий вид: $z \to P(w)z$, $w \to w$, где P — матрица, голоморфно зависящая от w. Условие

$$e(u) \to \left(\frac{\partial}{\partial z^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z^n}\right)$$

однозначно фиксирует P. Теорема доказана.

НИИСиМО

Поступило
26.12.89

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] C h e r n S. S., M o s e r J. K. Real hypersurfaces in complex manifolds// Asta Math. 1974. V. 133, N 3—4. P. 219—271.

[2] Л о б о д а А. В. Порождающие вещественно-аналитические многообразия коразмерности 2 в $\mathbf{C}^2$ и их биголоморфные отображения // Изв. АН СССР. 1988. № 5. С. 970—990.

[3] Б е л о ш а п к а В. К. Конечномерность группы автоморфизмов вещественно-аналитической поверхности // Изв. АН СССР. 1988. Т. 52, № 2. С. 437—442.

[4] T a n a k a N. On generalized graded Lie algebras and geometric structures// J. Math. Soc. Japan. 1967. V. 19, N 2. P. 215—254.